Лекция 10.

Квантовая механика фотона.

Отличительное свойство фотонов — равная нулю масса покоя. Поэтому в пустоте они всегда движутся со скоростью c. Связь между энергией и импульсом

$$\mathcal{E} = cp = \hbar c k. \quad \hat{H} = c\hat{p} = \hbar c \hat{k}. \tag{1}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{p})$$ — ур-ние Шредингера в импульсном представлении.

Оператор Гамильтона связан с энергией фотона общей формулой:

$$\mathcal{E} = \int \Psi^*(\vec{p}) \hat{H} \Psi(\vec{p})\, d\vec{p} = \cancel{\hbar} c \int \Psi^*(\vec{p})\, |\vec{p}|\, \Psi(\vec{p})\, d\vec{p}. \tag{2}$$

С другой стороны, фотону соответствует электромагнитное поле с энергией

$$\mathcal{E} = \int \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}^2 dV. \tag{3}$$

Естественно отождествить эти две энергии.
Оба вектора поля удовлетворяют ур-ниям Максвелла

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Разлагая $\vec{E}$ в интеграл Фурье

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \tag{5}$$

имеем

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{k}, t)}{\partial t^2} + k^2 \vec{E}(\vec{k}, t) = 0, \text{ или} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{k}, t)}{\partial t} = \pm ik \vec{E}(\vec{k}, t).$$

Для того, чтобы $\vec{E}(\vec{r}, t)$ было вещественным, должно выполняться условие $\vec{E}(\vec{k}, t) = \vec{E}^*(-\vec{k}, t)$. Введём вместо компоненты Фурье $\vec{E}(\vec{k}, t)$ новую функцию $\vec{f}(\vec{k}, t)$:

$$\vec{E}(\vec{k}, t) = N(k)\left[\vec{f}(\vec{k}, t) + \vec{f}^*(-\vec{k}, t)\right], \quad \vec{f}(\vec{k}, t) = \frac{1}{2N(k)}\left\{\vec{E}(\vec{k}, t) + \frac{i\dot{\vec{E}}(\vec{k}, t)}{k}\right\}. \tag{7}$$

$$\dot{\vec{E}}(\vec{k}, t) = -ik N(k)\left[\vec{f}(\vec{k}, t) - \vec{f}^*(-\vec{k}, t)\right]. \quad \vec{f}^*(-\vec{k}, t) = \frac{1}{2N(k)}\left\{\vec{E}(\vec{k}, t) - \frac{i\dot{\vec{E}}(\vec{k}, t)}{k}\right\} \tag{8}$$

Именно функция $\vec{f}(\vec{k}, t)$ имеет смысл волновой функции фотона в импульсном представлении. Действительно, уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = p\vec{f}, \text{ или } i\dot{\vec{f}} = k\vec{f}, \quad -i\dot{\vec{f}}^* = k\vec{f}^*$$

при подстановке в (7) и (8) дают тождество и ур-ние Максвелла (6). Множитель пропорциональности $N(k)$ находится из сопоставления (2) и (3):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}(\vec{k}, t) \vec{E}(\vec{k}', t)\, e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}} d\vec{k}\, d\vec{k}'\, dV = 4\pi^2 \int N^2(k) \vec{f}(\vec{k}) \vec{f}^*(\vec{k})\, d\vec{k}$$

если $N = \sqrt{c\hbar k / 4\pi^2}$ и $\int |\vec{f}(\vec{k})|^2 d\vec{k} = 1$ дает (2).

Таким образом, уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \vec{f}(\vec{k},t)}{\partial t} = \hbar k \cdot \vec{f}(\vec{k},t) \qquad (9)$$

для отдельного фотона эквивалентно уравнению Максвелла (6) для его электромагнитного поля (7) с

$$N = \sqrt{c\hbar k/4\pi^2} = \sqrt{\varepsilon}/2\pi . \qquad (10)$$

Вводя явную зависимость волновой функции от времени, можно написать

$$\Psi(\vec{k},t) = \vec{f}_0(\vec{k})\, e^{-i\omega t}$$ – волновая функция фотона в k-представлении,

$\vec{f}_0(\vec{k})$ удовлетворяет уравнению (9) при $\omega = ck$. Дополнительные требования к $\vec{f}_0(\vec{k})$:

$$\int |\vec{f}(\vec{k})|^2 d\vec{k} = 1;$$

кроме того, в силу $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, имеем:

$$\vec{k}\vec{f}_0(\vec{k}) = 0.$$

В других отношениях $\vec{f}_0(\vec{k})$ – любая.

Важная особенность фотонов: у них невозможно написать волновую функцию в x-представлении. Точнее, мы можем ввести

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\, \vec{f}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\vec{r}}, \qquad (10)$$

но функция (10) никак не характеризует вероятность нахождения фотона в данной точке пространства. Положение фотона может быть определено только по его воздействию на заряженную частицу. По $\vec{f}(\vec{k},t)$ фотона электрическое поле его в точке $\vec{r}$ восстанавливается формулой

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \vec{E}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = \frac{1}{(2\pi^4)}\int \sqrt{c\hbar k}\,\left[\vec{f}(\vec{k},t) + \vec{f}^*(-\vec{k},t)\right] e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

и не выражается локально через $\vec{f}(\vec{r},t)$.

Таким образом, особенность релятивистской квантовой механики безмассовой частицы (фотона) состоит в невозможности введения его волновой функции в координатном представлении. Его волновая функция в импульсном же представлении обладает обычным физическим смыслом. $|\vec{f}(\vec{k},t)|^2$ есть плотность вероятности нахождения импульса фотона в данной области $\vec{k}$-пространства.

Спин фотона = 1. Однако определение спина фотона как момента покоящейся частицы теряет смысл. Разделение полного момента фотона на спиновую и орбитальную части невозможно.

Фотоны не взаимодействуют непосредственно друг с другом. Поэтому волновая функция системы фотонов – волн. функция невзаимодействующих частиц. Фотоны – бозоны.

Квантование поля излучения.

В классической теории свободному электромагнитному полю можно формально сопоставить некоторую механическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Разлагая вектор-потенциал поля $\vec{A}$ на плоские волны и принимая бесконечный набор амплитуд разложения q_i за обобщенные координаты можно сопоставить эл-м. полю набор осцилляторов поля. Каждой компоненте $\vec{A}$ отвечает один из осцилляторов. Гамильтониан системы осцилляторов:

$$H = \sum H_\lambda = \sum_\lambda \frac{1}{2}(P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2).$$

P_λ - обобщенный импульс, отвечающий координате q_λ, ω_λ - соответствующая частота. Суммирование по всем частотам и поляризациям.

Заменим q_λ и P_λ операторами с коммут. соотношениями:

$$\hat{P}_\lambda \hat{q}_\mu - \hat{q}_\mu \hat{P}_\lambda = \frac{\hbar}{i}\delta_{\lambda\mu}, \quad \hat{q}_\lambda \hat{q}_\mu - \hat{q}_\mu \hat{q}_\lambda = 0, \quad \hat{P}_\lambda \hat{P}_\mu - \hat{P}_\mu \hat{P}_\lambda = 0.$$

Целесообразно сделать каноническое преобразование к новым переменным:

$$\hat{a}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar}}\,\hat{q}_\lambda + \frac{i\hat{P}_\lambda}{\sqrt{\omega_\lambda \hbar}}\right),$$

$$\hat{a}_\lambda^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar}}\,\hat{q}_\lambda - \frac{i\hat{P}_\lambda}{\sqrt{\omega_\lambda \hbar}}\right).$$

В новом представлении

$$\hat{P}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 \hat{q}_\lambda^2 = \hbar\omega_\lambda(\hat{a}_\lambda \hat{a}_\lambda^+ + \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda),$$

Так что

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_\lambda \hbar\omega_\lambda(\hat{a}_\lambda \hat{a}_\lambda^+ + \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda).$$

Операторы $\hat{a}_\lambda$ и $\hat{a}_\lambda^+$ удовлетворяют правилам коммутации:

$$\hat{a}_\lambda \hat{a}_\mu^+ - \hat{a}_\mu^+ \hat{a}_\lambda = \delta_{\lambda\mu}, \quad \hat{a}_\lambda \hat{a}_\mu - \hat{a}_\mu \hat{a}_\lambda = 0, \quad \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\mu^+ - \hat{a}_\mu^+ \hat{a}_\lambda^+ = 0.$$

Поэтому

$$\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\left(\hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2}\right).$$

Свободное эл-м. поле - система бозонов - фотонов.

Каждой плоской волне разложения эл-поля отвечает фотонное состояние. Энергия системы фотонов

$$E = \sum_\lambda E_\lambda n_\lambda + \sum_\lambda \frac{\hbar\omega_\lambda}{2} = \sum_\lambda E_\lambda n_\lambda + E_0, \quad E_\lambda = \hbar\omega_\lambda,$$

n_λ - число фотонов с энергией $\hbar\omega_\lambda$. E_0 - энергия (бесконечная) нулевых колебаний.

Найдем импульс свободного эл-м. поля. В классике

$$\vec{P}_\lambda = \frac{\vec{K}_\lambda}{K_\lambda c} \cdot E_\lambda$$

Если перейти к квантовым выражениям и заменить E_λ её квантовым значением

$$\vec{P}_\lambda = \hbar \vec{k}_\lambda .$$

Видно, что между энергией и импульсом фотона существует соотношение, найденное из опытных данных еще до квантовой механики $|\vec{P}_\lambda| = E_\lambda / c.$

Полный импульс $\vec{P} = \sum_\lambda \hbar \vec{k}_\lambda \cdot n_\lambda$

Волновая функция электромагнитного поля именуется амплитудой состояния поля. Во представлении вторичного квантования она есть функция чисел заполнения

$$\Psi = \Psi(n_1, n_2 \dots n_\lambda, \dots, t).$$

Операторы $\hat{a}_\lambda$ и $\hat{a}_\lambda^+$ – операторы рождения и уничтожения фотонов в состоянии λ.